

## Approssimazione di una sinusoidale.

Si consideri il problema di approssimare la funzione  $f(x) = \sin(x)$  tramite una funzione  $y(x)$  lineare a tratti, periodica di periodo  $2\pi$ .

Assumere come possibili criteri per valutare la bontà dell'approssimazione:

- il massimo errore, cioè la massima differenza tra  $y(x)$  e  $f(x)$ ;
- l'area della regione compresa tra i grafici delle due funzioni  $y(x)$  e  $f(x)$ .

Formulare il problema e classificarlo.

Sia  $n$  il numero di tratti utilizzati per definire  $y(x)$ . Risolvere il problema per alcuni valori ragionevoli di  $n$  e studiare come variano gli obiettivi suddetti al variare di  $n$ .

## Soluzione.

Sfruttando la simmetria, si può anzitutto osservare che il numero  $n$  di tratti per ogni periodo è sempre pari. Se si usasse un numero dispari di tratti per ogni periodo, due di essi sarebbero allineati a formare un unico segmento.

Sempre per simmetria la funzione  $y(x)$  passa per gli zeri di  $\sin(x)$ , cioè per i punti  $(0, 0)$  e  $(\pi, 0)$ .

Si può poi notare che per valori di  $n = 2, 6, \dots$ , cioè multipli dispari di 2, la funzione  $y(x)$  ha un massimo in  $x = \pi/2$  e un minimo in  $x = 3\pi/2$ , mentre per valori di  $n = 4, 8, \dots$ , cioè multipli pari di 2, la funzione  $y(x)$  è orizzontale in  $x = \pi/2$  e in  $x = 3\pi/2$ . Possiamo quindi definire due modelli leggermente diversi per i due casi. In entrambi i casi, grazie alla simmetria, basta definire l'andamento della  $y(x)$  tra 0 e  $\pi/2$ .

**Caso I.** Sia  $n$  un multiplo dispari di 2, cioè  $n = 2(2k - 1)$  per  $k \geq 1$  intero. Il valore di  $k$  indica quanti breakpoint di  $y(x)$  bisogna identificare tra 0 e  $\pi/2$ .

Siano  $\delta_i$  e  $h_i$  l'ascissa e l'ordinata del breakpoint  $i = 1, \dots, k$ . Valgono i limiti  $h_i \geq 0$  e  $0 \leq \delta_i \leq \pi/2$  per ogni  $i = 1, \dots, k$ . Grazie alla simmetria si può fissare

$$\delta_k = \pi/2.$$

Per comodità di gestione degli indici, definiamo anche

$$\delta_0 = 0$$

e

$$h_0 = 0.$$

Indichiamo il coefficiente angolare del segmento  $i = 1, \dots, k$  con

$$m_i = (h_i - h_{i-1})/(\delta_i - \delta_{i-1}).$$

La massima differenza tra  $y(x)$  e  $f(x)$  sia ha proprio in corrispondenza dei breakpoints. Indicando con  $E$  la variabile che rappresenta l'errore massimo, si ha quindi

$$E \geq h_i - \sin(\delta_i) \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

La massima differenza tra  $f(x)$  e  $y(x)$ , invece si ha nei punti in cui la tangente a  $f(x)$  è parallela al segmento di  $y(x)$ . I valori di  $\theta$  si trovano quindi imponendo i vincoli

$$\cos(\theta_i) = m_i \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

con i limiti

$$0 \leq \theta_i \leq \pi/2 \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Per limitare il massimo errore nei punti  $\theta$  si possono quindi usare le disequazioni

$$E \geq \sin(\theta_i) - (h_{i-1} + m_i(\theta_i - \delta_{i-1})) \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

**Caso II.** Sia  $n$  un multiplo pari di 2, cioè  $n = 4k$  per  $k \geq 1$  intero. Il valore di  $k$  indica quanti breakpoint di  $y(x)$  bisogna identificare tra 0 e  $\pi/2$ .

Valgono tutti i vincoli del caso precedente, con l'aggiunta di

$$E \geq 1 - h_k$$

che è l'errore in  $x = \pi/2$ .

In entrambi i casi il primo obiettivo è

$$\text{minimize } z_1 = E.$$

Per valutare il secondo obiettivo, occorre identificare i punti in cui  $f(x)$  e  $y(x)$  si intersecano, perché quelli sono gli estremi per il calcolo degli integrali. Ogni tratto rettilineo interseca la sinusoidale in due punti, denominati  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  per  $i = 1, \dots, k$ . Tali valori si trovano con i vincoli

$$\sin(\alpha_i) = h_{i-1} + m_i(\alpha_i - \delta_{i-1}) \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

$$\sin(\beta_i) = h_{i-1} + m_i(\beta_i - \delta_{i-1}) \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Perché siano trovati due valori distinti su ogni segmento, si può imporre

$$\alpha_i \leq \theta_i \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

$$\beta_i \geq \theta_i \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Nel caso II, bisogna trovare anche  $0 \leq \alpha_{k+1} \leq \pi/2$  grazie al vincolo

$$\sin(\alpha_{k+1}) = h_k.$$

In ogni intervallo tra  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , la sinusoidale  $f(x)$  è sopra alla spezzata  $y(x)$ , mentre in ogni intervallo tra  $\beta_i$  e  $\alpha_{i+1}$  accade l'opposto.

L'area sottesa alla sinusoidale  $f(x)$  tra due valori  $x_1$  e  $x_2$  è data da

$$A_f(x_1, x_2) = \cos(x_1) - \cos(x_2),$$

mentre l'area sottesa alla spezzata  $y(x)$  tra due punti  $x_1$  e  $x_2$  posti lungo il segmento  $i$  va calcolata come l'area di un trapezio:

$$A_y(x_1, x_2) = (y(x_1) + y(x_2))(x_2 - x_1)/2.$$

Quindi le aree comprese tra  $f(x)$  sopra e  $y(x)$  sotto sono date da:

$$A' = \sum_{i=1}^k (\cos(\alpha_i) - \cos(\beta_i) - (y(\alpha_i) + y(\beta_i))(\beta_i - \alpha_i)/2).$$

Nel Caso II, bisogna aggiungere ad  $A'$  l'ulteriore termine

$$\cos(\alpha_{k+1}) - h_k(\pi/2 - \alpha_{k+1}).$$

Le aree comprese tra  $y(x)$  sopra e  $f(x)$  sotto, invece, sono date da:

$$A'' = \sum_{i=1}^k (((h_{i-1} + y(\alpha_i))(\alpha_i - \delta_{i-1})/2 - (\cos(\delta_{i-1}) - \cos(\alpha_i))) + ((y(\beta_i) + h_i)(\delta_i - \beta_i)/2 - (\cos(\beta_i) - \cos(\delta_i))))$$

Nel Caso II, bisogna aggiungere ad  $A''$  l'ulteriore termine

$$h_k(\alpha_{k+1} - \delta_k) - (\cos(\delta_k) - \cos(\alpha_{k+1})).$$

Nelle espressioni qui sopra,

$$y(\alpha_i) = (\alpha_i - \delta_{i-1})m_i + h_{i-1},$$

$$y(\beta_i) = (\beta_i - \delta_{i-1})m_i + h_{i-1}.$$

L'obiettivo da minimizzare è

$$\text{minimize } z_2 = A' + A''.$$

Con entrambi gli obiettivi, il problema è di programmazione non-lineare ed è convesso. La soluzione è un ottimo globale ed è unica.